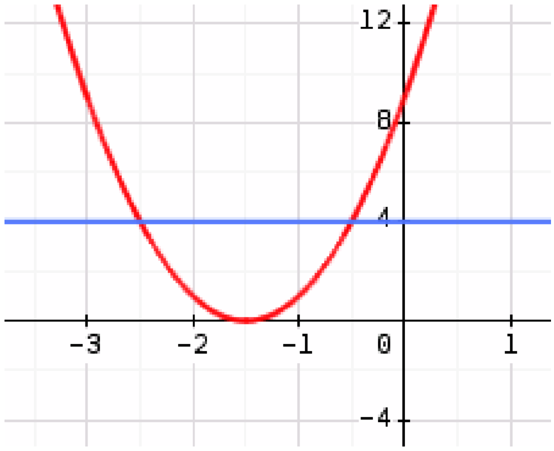
Corrigé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+3)^2$.

On s'intéresse à l'équation $f(x) = 4$ et à l'inéquation $f(x) < 4$.

1) Méthode graphique.

   a) Représentation graphique de la fonction f et de la droite horizontale d'équation $y = 4$.



   b) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 4$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f et de la droite horizontale d'équation $y = 4$.

   c) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 4$ sont -2.5 et -0.5.

   d) Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) < 4$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de la fonction f qui sont strictement au-dessous de la droite horizontale d'équation $y = 4$.

   e) Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 4$ est l'intervalle $]-2.5;-0,5[$.

2) Méthode calculatoire

   a) Montrons que l'équation $f(x) = 4$ est équivalente à l'équation $(2x+1)\times(2x+5) = 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x) = 4 &\Leftrightarrow (2x+3)^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow (2x+3)^2 - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow (2x+3)^2 - 2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (2x+3-2)\times(2x+3+2) = 0 \quad \text{avec } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\
&\Leftrightarrow (2x+1)\times(2x+5) = 0
\end{aligned}
$$

b) Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$.

$$\begin{aligned} f(x) = 4 &\Leftrightarrow (2x+1)\times(2x+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x+1 = 0 \text{ ou } 2x+5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = -1 \text{ ou } 2x = -5 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$ est $\left\{-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

c) Montrons que l'inéquation $f(x) < 4$ est équivalente à l'inéquation $(2x+1)\times(2x+5) < 0$.

$$\begin{aligned} f(x) < 4 &\Leftrightarrow (2x+3)^2 < 4 \\ &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - 4 < 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - 2^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+3-2)\times(2x+3+2) < 0 \quad \text{avec } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ &\Leftrightarrow (2x+1)\times(2x+5) < 0 \end{aligned}$$

d) Dressons le tableau de signes de $(2x+1)\times(2x+5)$.

On a $2x+1 \geq 0$ lorsque $2x \geq -1$ soit $x \geq -\frac{1}{2}$.

On a $2x+5 \geq 0$ lorsque $2x \geq -5$ soit $x \geq -\frac{5}{2}$.

Par suite

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x+1)\times(2x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

e) Déterminons l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 4$.

D'après le tableau de signes précédent

$$\begin{aligned} f(x) < 4 &\Leftrightarrow (2x+1) \times (2x+5) < 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in]-2.5; -0,5[\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 4$ est $]-2.5; -0,5[$.